第五届 Xionger 网络数学竞赛试卷

(分析与方程组, 2022 年 9 月 10 日至 9 月 12 日)

考试时间：2022 年 9 月 10 日上午 9 点至 9 月 12 日晚上 21 点
官方微信公众号：**Xionger 的数学小屋**

每题暂不设分值，希望诸位尽可能多地作答。试题解答请及时发送到邮箱 2609480070@qq.com, 逾期将取消参赛资格. 要求解答字迹清楚, 排版美观, 推荐采用 PDF 文档格式提交, 文件命名: **分析与方程组 + 昵称（或姓名）+ 学校**.

---

1. (a) 设 f 是右半平面 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ 上的全纯函数, $\forall z \in \mathbb{C}^+, |f(z)| < 1$. 并且 $f(1) = 0$. 证明

$$\sum_{n=1}^{2022} |f(n)| < \frac{4037}{2} - 2\ln 202$$

(b) 已知

$$f(z) = e^{z^2} - \frac{z^2}{\sqrt[2022]{\ln(e^{2022}+1) - 2022}}$$

试确定 $f(z)$ 在单位开圆盘内的零点个数.

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

2. $f(z)$ 在单位开圆盘 D 内全纯, 在 $\partial\overline{D} = \{z : |z| = 1\}$ 上连续. 在 $\partial\overline{D}$ 上满足

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$g(z)$ 是整函数, 满足 $g(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}, |g(z)| \leqslant e^{\pi|\mathrm{Im}\, z|}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(1) 是否存在满足题意的非常值的 f? 如果存在, 求出所有的 f; 如果不存在, 证明你的结论.

(2) 是否存在满足题意的非常值的 g? 如果存在, 求出所有的 g; 如果不存在, 证明你的结论.

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

3. 设整函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \mathrm{d}\ell(z) < \infty$$

其中 $\mathrm{d}\ell(z) = e^{-|z|^2}\mathrm{d}\lambda(z)$, $\mathrm{d}\lambda(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 测度. 证明: 对于所有满足以上条件的 f, 有

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(\zeta)| e^{z\bar{\zeta}} \mathrm{d}\ell(\zeta) \quad z \in \mathbb{C}.$$

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

4. 设 $R>0$, $B(0,R)\subset\mathbb{R}^n$ 表示球心在原点, 半径为 R 的 n 维球. 设 $u\geqslant 0$, u 在 $B\left(0,\frac{R}{4}\right)$ 内调和. 证明

$$\sup_{x\in B\left(0,\frac{R}{4}\right)} u(x)\leq\left(\frac{5}{3}\right)^n\inf_{x\in B\left(0,\frac{R}{4}\right)} u(x)$$

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

5. 设 $E=[0,1]$,$M>0$, f_n 在集合 E 上几乎处处收敛于 f, 并且对任意正整数 n

$$\int_E |f_n|^4\mathrm{d}x\leq M$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1(E)}=0$$

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

6. 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $Q\subset\mathbb{R}^n$ 是中心在原点, 边平行于坐标轴的方体, 用

$$A_Q^* f=\frac{1}{m(Q)}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)-f_Q|\mathrm{d}y$$

表示 f 在 Q 上的平均振动, 其中 f_Q 表示 f 在 Q 上的平均值

$$f_Q=\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y$$

定义

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} A_Q^* f$$

(1) 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $f\in C^\infty$, $\mathrm{supp} f\subset B$, $\forall x\in B$, 证明

$$|f(x)-\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}y|\leqslant\frac{2^n}{n}\int_B\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

(2) 证明: 对所有 $f\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 以及所有方体 Q 以及 $\theta<1/(2^n e)$, 有

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q\exp\left(\frac{\theta|f(x)-f_Q|}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)\mathrm{d}x<1+\frac{2^n e^2\theta}{1-2^n e\theta}.$$

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

7. 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集, 其测度 $m(A)=m>1$. 现取定 $n\in\mathbb{N}$ 是满足 $n<m$ 的一个正整数. 证明: 存在 A 中 $n+1$ 个两两不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\in A$, 使得

$$x_i-x_j\in\mathbb{Z},\qquad\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n+1\}.$$

湖州师范学院, **阿渣** 供题

8. 设 $V \subset C([0,1];\mathbb{R})$ 是线性子空间 (数域是 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$), 且存在 $C>0$ 使得

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \le C \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}, \qquad \forall f \in V.$$

证明: V 是有限维线性空间.

湖州师范学院, **阿渣** 供题

9. 求所有满足下述条件的实数 $a\in\mathbb{R}$: 存在可微函数 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 使得

$$f'(x) = f(x+a), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

湖州师范学院, **阿渣** 供题

10. 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一个压缩算子, 即 $\|T\| \le 1$. 对任意正整数 n, 定义

$$K_n = I + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(T^k + T^{*k}\right).$$

证明: $K_n \ge 0, n=1,2,\cdots$.

湖州师范学院, **阿渣** 供题

11. Let $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ be polynomial of degree n and n be any positive integer. Show that the equation $e^z - P_n(z) = 0$ has infinitely solutions in $\mathbb{C}$.

云南大学, **Ulyanov Aleksandrov** 供题

12. Let $P_n(z)$ be polynomial of degree n. $P_n^*(z) = z^n P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$. Show that if all the zeros of $P_n(z)$ are in $B(\infty, 1)$, then all the zeros of $P_n(z) + e^{i\theta} P_n^*(z)(\theta \in \mathbb{R})$ are lie on $\partial B(0, 1)$.

云南大学, **Ulyanov Aleksandrov** 供题